XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Решения заданий регионального этапа, 2 день**

**6.** *У уголка из трёх клеток центральной назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трех клеток тремя способами так, чтобы каждая ее клетка в одном из разбиений была центральной в своем уголке?* (Д. Демин)

**Ответ**. Существует. **Решение**. Вырежем у квадрата 4×4 угловые клетки. Легко проверить, что получившуюся фигуру можно разбить на уголки ровно тремя способами, и условие задачи для них выполняется.

**7.** *Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC. Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что AP = BR. Найдите сумму углов ARM, PBM и BMR.* (С. Берлов)

**Ответ**. 60°. **Решение**. Пусть отрезки *AR* и *BM* пересекаются в точке *Q*. Так как треугольники *ABP* и *BAR* равны по первому признаку, Ð*BAR* = Ð*ABP* = α. Тогда Ð*ARM*+Ð*BMR* = 180°–Ð*AQB* = 2α+Ð*PBM* (здесь первое равенство — теорема о внешнем угле для треугольника *MQR*, а второе — теорема о сумме углов для треугольника *AQB*), откуда Ð*ARM*+Ð*BMR*+Ð*PBM* = 2(α+Ð*PBM*) = 2Ð*ABM* = 60°.

**8.** *Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1.* (А. Кузнецов)

**Решение**. Впишем в квадрат круг радиуса 1 и проведем первый разрез. Если он не заденет вписанный круг, вырежем любой круг из части квадрата, не содержащей исходного круга. В противном случае разрез делит исходный круг на два сегмента. Заменим исходный круг двумя вписанными в эти сегменты кругами. Точки их касания с границей исходного круга — концы его диаметра, содержащего середину общей хорды сегментов, где вписанные в сегменты круги касаются друг друга. Теперь проведем второй разрез, рассмотрим пересеченные им части квадрата, получившиеся после первого разреза, и применим к каждой из них описанный выше алгоритм. Далее проделаем то же самое для третьего разреза и т. д. Очевидно, сумма радиусов выбранных кругов при этом не убывает, и после 2020-го разреза она будет не меньше 1.

**9.** *Дано натуральное число n, большее 2. Докажите, что если число n!+n3+1 — простое, то число n2+2 представляется в виде суммы двух простых чисел.* (Д. Демин)

**Решение**. Как известно, *n*3+1 = (*n*+1)(*n*2−*n*+1). Так как оба сомножителя в правой части тут меньше, чем (*n*+1)2, если один из них — составное число, то у него есть делитель *d*, больший 1, но не больший *n*. Но тогда и число *n*!+*n*3+1 делится на *d*, что противоречит его простоте. Значит, числа *n*2−*n*+1 и *n*+1 — простые, а в сумме они как раз дают *n*2+2.

**10.** *В квадратной таблице 2021×2021 стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий: 1) Прибавить к каждому выбранному числу 1. 2) Разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число. Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1?* (М. Дидин)

**Ответ**. Можно **Решение**. Докажем, что можно сделать первые *k* столбцов одинаковыми, индукцией по *k*. *База* — *k* = 1. *Переход*. Пусть первые *k* столбцов одинаковы. Будем прибавлять к (*k*+1)-ому столбцу 1 до тех пор, пока каждое число в нём не станет больше, чем соседнее число в *k*-ом столбце. Теперь рассмотрим *m*-ую строку. Пусть на пересечении её с *k*-ым столбцом стоит *a*, а на пересечении с (*k*+1)-ым столбцом — *b* > *a*. Пусть *a* при делении на *b*−*a* дает остаток *r*. Прибавим к *m*-ой строке *b−a−r* единиц. Теперь первые *k*+1 чисел в ней делятся на *b−a*. Далее прибавим к каждому из столбцов, начиная с (*k*+2)-го, по нескольку единиц так, чтобы все оставшиеся числа *m*-ой строки тоже стали делиться на *b−a*, после чего разделим *m*-ую строку на *b*-*a*. Заметим, что в итоге первые *k* чисел *m*-ой строки остались равными, а (*k*+1)-ое ее число стало на единицу больше каждого из них. Проделаем такую операцию с каждой строкой таблицы. Поскольку к первым *k*+1 столбцам на каждом этапе 1 добавляется одинаковое количество раз, окажется, что первые *k* столбцов, по-прежнему равны, а (*k*+1)-ый — на 1 больше. Прибавив по 1 к первым *k* столбцам, завершим переход индукции. Когда все столбцы таблицы равны и в каждой строке все элементы одинаковы, завершаем решение делением каждой строки на её элемент.